

استاد : حبیب هاشمی

همکلاسی

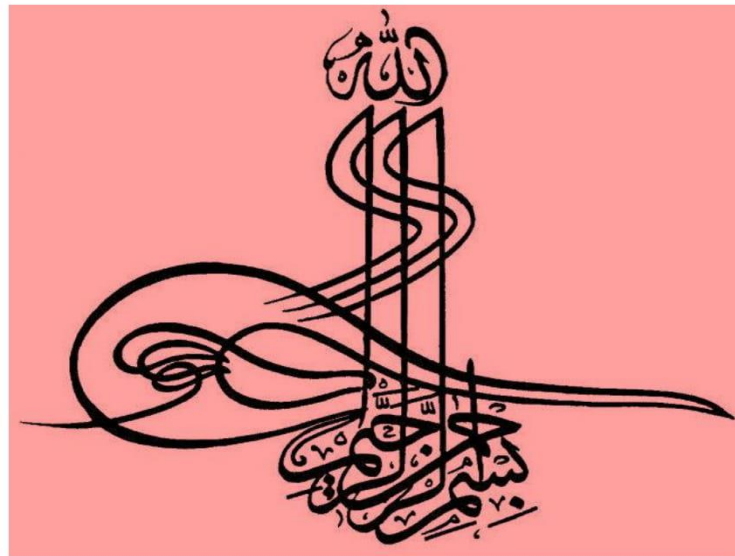
Hamkelasi.ir

مبحث : جزوه فصل سوم ریاضی پیش دانشگاهی تجربی مشتق

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir



@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱


www.riazikade.ir

مشتق

(رشته علوم تجربی و ریاضی فیزیک)

آموزش نکته ها و مفاهیم 

پاسخ های تشریحی به سوالات 

سوالات چند گزینه ای 

تمرین های برای آمادگی 

مؤلف :

حبیب هاشمی

۱۳۹۶

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تالیف حبیب هاشمی کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با هیجده سال سابقه تدریس در برگزاری کلاس های کنکور؛ دبیر رسمی آموزش و پرورش منطقه ۴ تهران و مدرس دانشگاه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و یا به آیدی تلگرام @habib_hashemi پیام دهید.

اینستاگرام: academy.riazi

مشاهده جزوات در سایت ریاضیکده www.riazikade.ir

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

تدریس خصوصی و مبحثی ریاضیات

متوسطه

و

تضمینی کنکور

تهران و کرج

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

مقدمه

کتاب حاضر که براساس مطالب کتاب درسی، مبحث « مشتق » نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

- ۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.
 - ۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.
 - ۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.
 - ۴- در این کتاب با نگاهی عمیق تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثالها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.
 - ۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.
 - ۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.
 - ۷- توجه به دانش قبلی دانش آموزان.
 - ۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.
- در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

فهرست

صفحه

عنوان

۱ فرمول های مشتق ۹

۱-۱ فرمول های پایه ای مشتق ۹

۱-۲ مشتق توابع رادیکالی ۱۲

۱-۳ مشتق توابع مثلثاتی ۱۶

۱-۴ چند نکته در مورد مشتق گیری ۲۵

۱-۵ مشتق تابع Ln ۳۸

۱-۶ مشتق توابع نمایی ۴۳

۱-۷ مشتق گیری ضمنی ۴۶

۲ معادله خط مماس و قائم بر منحنی از نقطه $A(x_0, y_0)$ واقع بر منحنی

۲-۱ یادآوری معادله خط ۵۵

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

۲-۲ معادله خط مماس بر منحنی از نقطه $A(x_0, y_0)$ واقع بر منحنی... ۵۶

۲-۳ معادله ی خط قائم بر منحنی از نقطه $A(x_0, y_0)$ واقع بر منحنی... ۸۰

۳ آهنگ تغییر..... ۹۹

۳-۱ نمو تابع و نمو متغیر..... ۹۹

۳-۲ آهنگ متوسط تغییر..... ۱۰۰

۳-۳ آهنگ لحظه‌ای (آنی) تغییر تابع..... ۱۰۲

۴ تعریف مشتق..... ۱۰۹

۴-۱ تعبیر هندسی مشتق..... ۱۰۹

۴-۲ حدهایی که شبیه تعریف مشتق هستند..... ۱۱۱

۴-۳ مشتق‌های یکطرفه..... ۱۱۵

۴-۳-۱ مشتق راست..... ۱۱۵

۴-۳-۲ مشتق چپ..... ۱۱۵

۴-۴ مشتق توابع قدرمطلق..... ۱۱۹

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

۴-۵ مشتق توابع شامل جزء صحیح..... ۱۲۸

۴-۶ مشتق توابع چندضابطه ای..... ۱۳۲

۴-۶-۱ به دست آوردن مجهولات در توابع چند ضابطه ای مشتق پذیر..... ۱۳۴

۵ مشتق تابع مرکب و مشتق زنجیره ای..... ۱۴۵

۵-۱ مشتق تابع مرکب..... ۱۴۵

۵-۲ مشتق زنجیره ای..... ۱۵۰

منابع..... ۱۵۳

جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

۱ فرمول های مشتق

۱-۱ فرمول های پایه ای مشتق

<p>۱) $y = a \rightarrow y' = 0$ $y = 3 \rightarrow y' = 0$ $y = \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $y = \frac{\pi}{3} \rightarrow y' = 0$</p>	<p>۲) $y = ax \rightarrow y' = a$ $y = \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $y = -x \rightarrow y' = -1$ $y = \frac{1}{3}x \rightarrow y' = \frac{1}{3}$ $y = \pi x \rightarrow y' = \pi$</p>
<p>۳) $y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1}$ $y = x^4 \rightarrow y' = 4x^3$ $y = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$</p>	<p>۴) $y = u \pm v \pm w \pm \dots \rightarrow y' = u' \pm v' \pm w'$ $y = x^4 - 2x + 5 \rightarrow y' = 4x^3 - 2$</p>
<p>مشتق حاصلضرب</p> <p>۵) $y = (u) \times (v) \rightarrow y' = (u)' \times (v) + (v)' \times (u)$ $y = (x^2 - 4)(x^2 - 2x + 1) \rightarrow$ $y' = (2x)(x^2 - 2x + 1) + (2x^2 - 2)(x^2 - 4)$</p>	<p>حالت خاص ضرب</p> <p>تابع \times عدد</p> <p>$y = a u \rightarrow y' = a(u)'$ $y = 3(x^4 - 2x) \rightarrow y' = 3(4x^3 - 2)$</p>
<p>مشتق تقسیم</p> <p>۶) $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{(u)' \times (v) - (v)'(u)}{(v)^2}$ $y = \frac{x - 4}{1 - 2x} \rightarrow y' = \frac{(1)(1 - 2x) - (-2)(x - 4)}{(1 - 2x)^2}$</p>	<p>حالت خاص تقسیم ۱</p> <p>$y = \frac{u}{a} \rightarrow y' = \frac{(u)'}{a}$ $y = \frac{x^2 - 4}{3} \rightarrow y' = \frac{2x}{3}$ $y = \frac{x}{4} \rightarrow y' = \frac{1}{4}$</p>
<p>حالت خاص تقسیم ۲</p> <p>$y = \frac{a}{u} \rightarrow y' = \frac{-a(u)'}{(u)^2}$ $y = \frac{2}{x^2 + 2x} \rightarrow y' = -\frac{2(2x + 2)}{(x^2 + 2x)^2}$</p>	<p>مشتق توان</p> <p>۷) $y = u^n \rightarrow y' = n(u)^{n-1} \cdot (u)'$ $y = (x^2 - 3x)^5 \rightarrow$ $y' = 5(x^2 - 3x)^4(2x - 3)$</p>

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

مثال : مشتق توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده حساب کنید.

$$۱) \quad y = \frac{x}{1+x} \quad x = ۲$$

$$y' = \frac{(۱)(1+x) - (۱)(x)}{(1+x)^2} \xrightarrow{x=2} y' = \frac{1(1+2) - (1)(2)}{(1+2)^2} = \frac{3-2}{(3)^2} = \frac{1}{9}$$

$$۲) \quad y = \frac{1}{1+x^2} \quad x = ۱$$

$$y' = -\frac{1(2x)}{(1+x)^2} \xrightarrow{x=1} y' = -\frac{1(2(1))}{(1+1)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$۳) \quad y = \frac{2}{x^2-1} \quad x = -۱$$

$$y' = -\frac{2(2x^1)}{(x^2-1)^2} \xrightarrow{x=-1} y' = -\frac{2(2(-1)^1)}{((1)^2-1)^2} = -\frac{6}{4}$$

$$۴) \quad y = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \quad x = ۸$$

$$y' = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} - \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \xrightarrow{x=8} y' = \frac{5}{3}(8)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}(8)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{5}{3}(2^3)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}(2^3)^{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3}(2)^2 - \frac{2}{3}(2)^{-1} = \frac{8 \times 32}{6} - \frac{2}{6} = \frac{256}{6} - \frac{2}{6} = \frac{254}{6}$$

$$۵) \quad y = \frac{x}{x^2-1} \quad x = ۰$$

$$y' = -\frac{1(x^2-1) - (2x)(x)}{(x^2-1)^2} \xrightarrow{x=0} y' = -۱$$

$$۶) \quad y = \frac{1}{12}x^6 + \frac{1}{6}x^3 - x^2 \quad x = ۱$$

$$y' = \frac{1}{12} \times 6x^5 + \frac{1}{6} \times 3x^2 - 2x = \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

$$\xrightarrow{x=1} \frac{1}{2}(1)^5 + \frac{1}{2}(1)^2 - 2(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{2+3-12}{6} = -\frac{7}{6}$$

$$۷) \quad y = (x^3 - 3x^2 + 10)^{\frac{1}{3}} \quad x = ۱$$

$$y' = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 10)^{-\frac{2}{3}}(3x^2 - 6x)$$

$$\xrightarrow{x=1} y' = \frac{1}{3}(8)^{-\frac{2}{3}} \times (-3) = \frac{1}{3}(2^3)^{-\frac{2}{3}}(-3) = \frac{1}{3}(2)^{-2}(-3) = -\frac{1}{6}$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$8) \quad y = \frac{36}{x^2} \quad x = \sqrt[3]{12}$$

$$y' = \frac{-36 \times (2x)}{(x^2)^2} = \frac{-72x}{x^4} = \frac{-72}{x^3} \xrightarrow{x=\sqrt[3]{12}} y' = \frac{-72}{(\sqrt[3]{12})^3} = \frac{-72}{12} = -6$$

$$9) \quad y = \frac{(2-x)^2}{x} \quad x = 1$$

$$y' = \frac{(2(2-x)(-1))(x) - (1)(2-x)^2}{(x)^2} \xrightarrow{x=1} y' = -3$$

$$10) \quad y = \frac{x^2}{x^2+1} \quad x = -1$$

$$y' = \frac{(2x^2)(x^2+1) - (2x)(x^2)}{(x^2+1)^2} \xrightarrow{x=-1} y' = +1$$

$$11) \quad y = (2x+1)^{-\frac{1}{2}} \quad x = 4$$

$$y' = -\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}-1}(2) = -(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\xrightarrow{x=4} y' = -(2(4)+1)^{-\frac{3}{2}} = -(9)^{-\frac{3}{2}} = -(3^2)^{-\frac{3}{2}} = -(3)^{-3} =$$

$$12) \quad y = (x-1)(x+1)(x^2+1) \quad x = 2$$

$$y = (x^2-1)(x^2+1) = x^4-1 \rightarrow y' = 4x^3 \xrightarrow{x=2} y' = 4(2)^3 = 32$$

$$13) \quad y = \frac{7x^2+6x-4}{9} \rightarrow y' = \frac{14x+6}{9}$$

$$14) \quad y = 4(x^2-2x-1) \rightarrow y' = 4(2x^2-2)$$

$$15) \quad y = \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{2} - x + \sqrt{2}$$

$$y' = \frac{2x^2}{3} - \frac{2x}{2} - 1 + 0 \rightarrow y' = x^2 - x - 1$$

$$16) \quad y = (4x^2-1)^5(2-x^2)$$

$$y' = \underbrace{(5(4x^2-1)^4(8x))}_{\text{مشتق اول}}(2-x^2) + (-2x)(4x^2-1)^5$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$17) \quad y = \frac{(2x-1)^2}{2x^2}$$

$$y' = \frac{(2(2x-1)(2))(2x^2) - (4x)(2x-1)^2}{(2x^2)^2}$$

۲-۱ مشتق توابع رادیکالی

I) بدون فرجه (فرجه ۲) : ابتدا مشتق می‌زنه تو سر رادیکال

$$1) \quad y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$$

میشه $\frac{1}{2\sqrt{u}}$ بعد می‌زنه تو سر عبارت زیر رادیکال میشه u'

$$y = \sqrt{2x^2 - 1} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{2x^2 - 1}} \times 4x$$

$$2) \quad y = \sqrt[m]{u^n} = u^{\frac{n}{m}}$$

$$y' = \frac{n}{m} u^{\frac{n}{m}-1} \times u' = \frac{nu'}{m \sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

II) فرجه‌دار : ابتدا به صورت توان می‌نویسیم
سپس از قانون مشتق توان استفاده می‌کنیم

$$y = \sqrt[3]{(vx+1)^2} \rightarrow y = \frac{2}{3} \rightarrow y' = \frac{2}{3} (vx+1)^{\frac{2}{3}-1} \times (v)$$

مشتق توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده به دست آورید.

$$1) \quad y = \sqrt{4-x^2} \quad x = \sqrt{3}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \times (-2x) \xrightarrow{x=\sqrt{3}} y' = \frac{1}{2\sqrt{4-3}} \times (-2\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$$

$$2) \quad y = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad x = 4$$

$$y' = \frac{1 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1}{(\sqrt{x})^2} \xrightarrow{x=4} y' = \frac{-1}{16}$$

$$3) \quad y = \frac{x}{\sqrt{x+2}} \quad x = 1$$

$$y' = \frac{(1)(\sqrt{x+2}) - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1\right)(x)}{(\sqrt{x+2})^2} \xrightarrow{x=1} y' = \frac{5}{18}$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

۴) $y = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \quad x = 1$
 $y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}} \times \left(\frac{(2x)(1+x^2) - (2x)(x^2)}{(1+x^2)^2} \right) \xrightarrow{x=1} y' = \frac{\sqrt{2}}{4}$

۵) $y = \sqrt{1 + \sqrt{1+x^2}} \quad x = \sqrt{3}$
 $y' = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1+x^2}}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \times 2x \right) \xrightarrow{x=\sqrt{3}} y' = \frac{1}{4}$

۶) $y = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad x = 4$
 $y' = \frac{\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1\right)(\sqrt{x}) - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1\right)(x - \sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2} \xrightarrow{x=4} y' = \frac{1}{4}$

۷) $y = x\sqrt{4-x^2} \quad x = \sqrt{3}$
 $y' = (1)\sqrt{4-x^2} + \left(\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \times (-2x)\right) \times x \xrightarrow{x=\sqrt{3}} y' = -2$

۸) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} \quad x = 5$
 $y' = \frac{(2x)(\sqrt{x-1}) - \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} \times 1\right)(x^2)}{(\sqrt{x-1})^2} \xrightarrow{x=5} y' = \frac{55}{16}$

۹) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + x \quad x = 9$
 $y' = \frac{-1 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1}{(\sqrt{x})^2} + 1 \xrightarrow{x=9} y' = \frac{53}{54}$

۱۰) $y = x\sqrt{x} + x - 1 \quad x = 1$
 $y' = (1)(\sqrt{x}) + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1\right)(x) + 1 \xrightarrow{x=1} y' = \frac{5}{2}$

۱۱) $y = \sqrt[3]{x} + 4\sqrt[5]{x^2} \quad x = -1$
 $y = x^{\frac{1}{3}} + 4x^{\frac{2}{5}} \rightarrow y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 4 \times \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} \xrightarrow{x=-1} y' = -\frac{19}{15}$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$12) \quad y = \sqrt[3]{vx^2} + \sqrt[5]{2x^3}$$

$$y = (vx^2)^{\frac{1}{3}} + (2x^3)^{\frac{1}{5}} \rightarrow y' = \frac{1}{3}(vx^2)^{\frac{1}{3}-1} \times 14x + \frac{1}{5}(2x^3)^{\frac{1}{5}-1}(6x^2)$$

$$13) \quad y = \sqrt[3]{x\sqrt{x}} \quad x = 1$$

$$y = \sqrt[3]{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{x=1} y' = \frac{1}{2}$$

$$14) \quad y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+2}} \quad x = 64$$

$$y' = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1\right)(\sqrt[3]{x+2}) - \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)(\sqrt{x})}{(\sqrt[3]{x+2})^2} \xrightarrow{x=64} y' = \frac{5}{164}$$

$$15) \quad y = \frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{6} \quad x = \sqrt{2}$$

$$y' = \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{3}}}{6} \rightarrow y' = \frac{\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{1}{3}-1} \times (-2x)}{6} \xrightarrow{x=\sqrt{2}} y' = \frac{-\sqrt{2}}{15}$$

$$16) \quad y = \sqrt{3x-1}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{3x-1}} \times 3$$

$$17) \quad y = \sqrt[3]{(x^2+x)^2}$$

$$y = (x^2+x)^{\frac{2}{3}} \rightarrow y' = \frac{2}{3}(x^2+x)^{\frac{2}{3}-1}(2x+1) \rightarrow y' = \frac{2}{3}(x^2+x)^{-\frac{1}{3}}(2x+1)$$

$$18) \quad y = \sqrt{\frac{1}{x}} \quad x = 4$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}}} \times \left(\frac{1}{x}\right)' \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}}} \times \left(-\frac{1 \times 1}{x^2}\right) \xrightarrow{x=4} y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} \times \left(-\frac{1}{4^2}\right) = -\frac{1}{16}$$

$$19) \quad y = x\sqrt{x}$$

$$y' = 1 \times \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1 \times x$$

$$20) \quad y = \sqrt{2x} \quad x = 2$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2x}} \times 2 \xrightarrow{x=2} y' = \frac{1}{2}$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$\begin{aligned}
 ۲۱) \quad y &= \sqrt[۳]{۴x} & x &= ۲ \\
 y &= (۴x)^{\frac{1}{۳}} \rightarrow y' = \frac{1}{۳} (۴x)^{-\frac{2}{۳}} \times ۴ \xrightarrow{x=۲} y' = \frac{1}{۳} (۸)^{-\frac{2}{۳}} \times ۴ \\
 \Rightarrow y' &= \frac{1}{۳} \times (۲^۳)^{-\frac{2}{۳}} \times ۴ = \frac{1}{۳} \times \frac{1}{۲۲} \times ۴ = \frac{1}{۳} \times \frac{1}{۴} \times ۴ = \frac{1}{۳}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۲۲) \quad y &= (\sqrt{x} + ۱)^۲ & x &= ۴ \\
 y' &= ۲(\sqrt{x} + ۱) \left(\frac{1}{۲\sqrt{x}} \times ۱ \right) \xrightarrow{x=۴} y' = ۲(۲) \left(\frac{1}{۴} \right) = \frac{۳}{۲}
 \end{aligned}$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

۱-۳ مشتق توابع مثلثاتی

(I) بدون توان (توان یک): مشتق می‌زنه تو سر سینوس میشه کسینوس بعد مشتق می‌زنه تو سر کمان

- ۱) $y = \sin u \rightarrow y' = (\cos u) \times (u)'$
 $y = \sin(\Delta x^2 - 1) \rightarrow y' = \cos(\Delta x^2 - 1) \times (1 \cdot 2x)$
- ۲) $y = \cos u \rightarrow y' = (-\sin u) \times (u)'$
 $y = 2 \cos(x^2 - x) \rightarrow y' = 2 \times (-\sin(x^2 - x)) \times (2x - 1)$
- ۳) $y = \tan u \rightarrow y' = (1 + \tan^2 u) \times (u)'$
 $y = 3 \tan \sqrt{x} \rightarrow y' = 3 \times (1 + \tan^2 \sqrt{x}) \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1\right)$
- ۴) $y = \cot u \rightarrow y' = -(1 + \cot^2 u) \times (u)'$
 $y = 4 \cot\left(2x^2 - \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow y' = 4 \times -\left(1 + \cot^2\left(2x^2 - \frac{\pi}{4}\right)\right) \times (4x)$

(II) مثلثاتی توان دار:

ضریب ، توان ، مشتق کمان
مشتق بگیر کم کن توان

- ۱) $y = a \sin^m u \rightarrow y' = \frac{a \cdot m \cdot u' \cos u \cdot \sin^{m-1} u}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$
 $y = 3 \sin^5 4x^2 \rightarrow y' = 3 \times 5(4x) \cos 4x^2 \cdot \sin^4 4x^2$
- ۲) $y = a \cos^m u \rightarrow y' = a \cdot m u' (-\sin u) \cos^{m-1} u$
 $y = -2 \cos^4 \sqrt{x} \rightarrow y' = (-2) \times 4 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) (-\sin \sqrt{x}) \cos^3 \sqrt{x}$
- ۳) $y = a \tan^m u \rightarrow y' = a m u' (1 + \tan^2 u) \tan^{m-1} u$
 $y = 2 \tan^2(\pi - x^2) \rightarrow y' = 2 \times 2(-2x)(1 + \tan^2(\pi - x^2)) \tan^2(\pi - x^2)$
- ۴) $y = a \cot^m u \rightarrow y' = a m u' (-(1 + \cot^2 u)) \cot^{m-1} u$
 $y = 4 \tan^6\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow y' = 4 \times 6 \left(\frac{-1}{x^2}\right) \left(-\left(1 + \cot^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) \cot^5\left(\frac{1}{x}\right)$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

مثال : مشتق توابع زیر را حساب کنید.

۱) $y = \tan 3x + \sin \sqrt{x}$

$$y' = (1 + \tan 3x) \times 3 + (\cos \sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1$$

۲) $y = \frac{2 \cos x}{\sin x + 2} \rightarrow y' = \frac{(2 \cos x)'(\sin x + 2) - (\sin x + 2)'(2 \cos x)}{(\sin x + 2)^2}$

$$y' = \frac{2(-\sin x) \cdot (\sin x + 2) - ((\cos x)(2 \cos x))}{(\sin x + 2)^2}$$

۳) $y = \tan^5 \frac{x}{3} \rightarrow y' = 1 \times 5 \times \frac{1}{3} \times (1 + \tan^2 \frac{x}{3}) \left(\tan^4 \frac{x}{3} \right)$

۴) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

$$y' = 1 \times 3 \times 1(\cos x)(\sin^2 x) + 1 \times 3 \times 1 \times (-\sin x)(\cos^2 x)$$

۵) $y = \sqrt[3]{1 + \cos^4 x} \rightarrow y = (1 + \cos^4 x)^{\frac{1}{3}}$

$$y' = \frac{1}{3} (1 + \cos^4 x)^{\frac{1}{3}-1} (1 + \cos^4 x)' \rightarrow y' = \frac{1}{3} (1 + \cos^4 x)^{-\frac{2}{3}} (1 \times 4 \times 1(-\sin x)(\cos^3 x))$$

۶) $y = \frac{\sin x - \cos x}{2 \cos x + 3} \rightarrow y' = \frac{(\sin x - \cos x)'(2 \cos x + 3) - (2 \cos x + 3)'(\sin x - \cos x)}{(2 \cos x + 3)^2}$

$$y' = \frac{(\cos x - (-\sin x))(2 \cos x + 3) - (2(-\sin x))(\sin x - \cos x)}{(2 \cos x + 3)^2}$$

<p>۷) $y = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$</p> $y' = \frac{((1 + \tan^2 x) \times (1))(1 + \tan x) - ((1 + \tan^2 x)(1))(\tan x)}{(1 + \tan x)^2}$ <p>جایگذاری $x = \frac{\pi}{3}$</p>	<p>$x = \frac{\pi}{3}$</p> <p>جواب : $4 - 2\sqrt{3}$</p>
<p>۸) $y = \frac{x^2 - \sin^2 x}{1 + \cos^2 x}$</p> $y' = \frac{(2x - 1 \times 2 \times 1(\cos x) \times (\sin x))(1 + \cos^2 x) - (1 \times 2 \times 1 \times (-\sin x) \cos x)(x^2 - \sin^2 x)}{(1 + \cos^2 x)^2}$ <p>جایگذاری $x = \pi$</p>	<p>$x = \pi$</p> <p>جواب : π</p>
<p>۹) $y = \sqrt{1 + \sin^2 x}$</p> $y' = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sin^2 x}} \times (1 \times 2 \times 1 \times \cos x \times \sin x)$ <p>جایگذاری $x = \frac{\pi}{3}$</p>	<p>$x = \frac{\pi}{3}$</p>

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

		جواب : $\frac{\sqrt{21}}{14}$
۱۰) $y = \sin \sqrt{1+x^2}$	$y' = (\cos \sqrt{1+x^2}) \times \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \times 2x\right) \xrightarrow{x=\sqrt{3} \text{ جایگذاری}}$	$x = \sqrt{3}$ جواب : $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2$
۱۱) $y = \cos \sqrt[3]{t} = \cos (t^{\frac{1}{3}})$	$y' = (-\sin t^{\frac{1}{3}}) \left(\frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}}\right) \xrightarrow{x=\frac{\pi^2}{8} \text{ جایگذاری}}$	$x = \frac{\pi^2}{8}$ جواب : $-\frac{4}{3\pi^2}$
۱۲) $y = \sqrt[5]{1+\tan x} = (1+\tan x)^{\frac{1}{5}}$	$y' = \frac{1}{5} (1+\tan x)^{-\frac{4}{5}} (1+\tan^2 x) \xrightarrow{x=0 \text{ جایگذاری}}$	$x = 0$ جواب : $\frac{1}{5}$
۱۳) $y = \tan^2(\pi x)$	$y' = 2 \times \pi \times (1+\tan^2 \pi x) (\tan \pi x) \xrightarrow{x=\frac{3}{4} \text{ جایگذاری}}$	$x = \frac{3}{4}$ جواب : -4π
۱۴) $y = \sin\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) + \cos \frac{x}{2}$	$y' = \cos\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) + (-\sin \frac{x}{2}) \left(\frac{1}{2}\right) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{2} \text{ جایگذاری}}$	$x = \frac{\pi}{2}$ $-\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4}$ جواب :
۱۵) $y = \sqrt{3}\pi \sin^2 \sqrt{t}$	$y' = \sqrt{3}\pi \times 2 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} \times 1\right) (\cos \sqrt{t}) (\sin^2 \sqrt{t}) \xrightarrow{x=\frac{\pi^2}{36} \text{ جایگذاری}}$	ضریب ، توان ، مشتق کمان مشتق بگیر کم کن توان $x = \frac{\pi^2}{36}$ جواب : $\frac{27}{8}$
۱۶) $y = \sqrt{3} \sin^2 x + 2 \cos^2 x$	$y' = \sqrt{3} \times 2 \times 1 \times (\cos x) (\sin x) + 2 \times 2 \times 1 \times (-\sin x) (\cos^2 x) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6} \text{ جایگذاری}}$	$x = \frac{\pi}{6}$ جواب : $-\frac{3}{4}$
۱۷) $y = \tan^2 x - 2 \cot x$	$y' = 2 \times 1 \times 1 \times (1+\tan^2 x) (\tan x) - (-2) (1+\cot^2 x) (1) \xrightarrow{x=\frac{3\pi}{4} \text{ جایگذاری}}$	$x = \frac{3\pi}{4}$ جواب : ۰

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$18) \quad y = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x}$$

$$y' = \frac{(1 \times 2 \times 1 \times \cos x \times \sin x)(1 + \cos^2 x) - (1 + \cos^2 x)^2}{(1 + \cos^2 x)^2}$$

$$\xrightarrow{x = \frac{3\pi}{4} \text{ جایگذاری}} (1 \times 2 \times 1 \times (-\sin x)(\cos x))(\sin^2 x)$$

$$x = \frac{3\pi}{4}$$

جواب : $-\frac{8}{9}$

$$19) \quad y = \frac{\sin x}{1+x} \quad x = 0$$

$$y' = \frac{((\cos x)(1))(1+x) - (1)(\sin x)}{(1+x)^2}$$

$$\xrightarrow{x=0} y' = \frac{(\cos 0)(1+0) - (1)(\sin 0)}{(1+0)^2} = 1$$

$$20) \quad y = 4 \sin x \cos 3x \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$y' = 4(\cos x \cdot \cos 3x + (-\sin 3x) \times (3) \times (\sin x))$$

$$\xrightarrow{x = \frac{\pi}{3}} y' = 4 \left(\frac{1}{2} \times (-1) + (-0) \times (3) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$$

$$y' = 4 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -2$$

$$21) \quad y = x + \sin \sqrt{x} \quad x = \pi^2$$

$$y' = 1 + (\cos \sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1 \right)$$

$$\xrightarrow{x = \pi^2} y' = 1 + \left((-1) \left(\frac{1}{2\pi} \right) \right) = \frac{2\pi - 1}{2\pi}$$

$$22) \quad y = 3 \cos x \sin 2x \quad x = \pi$$

جواب : -6

$$23) \quad y = \sqrt{1 + \sin x} \quad x = 0$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sin x}} \times (0 + \cos x)$$

$$\xrightarrow{x=0} y' = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} \times (0 + 1) = \frac{1}{2}$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$24) \quad y = \sin x \cdot \tan x \quad x = \frac{3\pi}{4}$$

$$y' = (\cos x)(\tan x) + (1 + \tan^2 x)(\sin x)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{3\pi}{4}} y' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-1) + (1 + (-1)^2)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$25) \quad y = \frac{2}{\cos 2x} \quad x = \frac{3\pi}{8}$$

$$y' = \frac{-2(-\sin 2x)(2)}{(\cos 2x)^2}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{3\pi}{8}} y' = \frac{-2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2)}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$$

$$26) \quad y = \cos \sqrt{3}x + \sin \sqrt{3}x \quad x = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$$

$$y' = (-\sin \sqrt{3}x)(\sqrt{3}) + (\cos \sqrt{3}x)(\sqrt{3})$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}} y' = (-(-1))(\sqrt{3}) + (0)(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

$$27) \quad y = \frac{1}{\cos x + \sin x} \quad x = 3\pi$$

$$y' = -\frac{1 \times (-\sin x + \cos x)}{(\cos x + \sin x)^2}$$

$$\xrightarrow{x=3\pi} y' = -\frac{1 \times (-(-1) + (-1))}{(-1 + 0)^2} = -\frac{-1}{1} = 1$$

$$28) \quad y = \frac{1 - \cos^2 x}{2 + \sin^2 x} \quad x = \frac{\pi}{4}$$

$$y' = \frac{(0 - (1 \times 2 \times 1)(-\sin x)(\cos x))(2 + \sin^2 x) - (0 + 1 \times 2 \times 1 \cos x \sin x)(1 - \cos^2 x)}{(2 + \sin^2 x)^2}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} y' = \frac{-\left(2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) - \left(2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)}{\left(2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^2} = \frac{12}{49}$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$29) \quad y = \sin wt + \cos wt \quad t = \frac{\pi}{2w}$$

$$y' = (\cos wt)(w) + (-\sin wt)(w)$$

$$t = \frac{\pi}{2w} \rightarrow y' = (0 \times w + (-1) \times w) = -w$$

$$30) \quad y = \sin^2 2x \quad x = \frac{2\pi}{3}$$

$$y' = 1 \times 2 \times 2 \times \cos 2x \times \sin^2 2x$$

$$\xrightarrow{x=\frac{2\pi}{3}} y' = 1 \times 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{3}{2}$$

$$31) \quad y = x \tan \frac{x}{2} \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

$$y' = 1 \times \left(\tan \frac{x}{2}\right) + \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \times x$$

$$\xrightarrow{x=\frac{3\pi}{2}} y' = 1(-1) + (1 + (-1)^2) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{-2 + 3\pi}{2}$$

$$32) \quad y = \sin(\pi + \cos x) \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$y' = (\cos(\pi + \cos x))(0 + (-\sin x))$$

$$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow y' = (\cos(\pi + 0)) \left(-\sin \frac{\pi}{2}\right) = (-1)(-1) = 1$$

$$33) \quad y = \frac{x \sin x}{\sin x + \cos x} \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

$$y' = \frac{((1) \sin x + \cos x \times x)(\sin x + \cos x) - (\cos x + (-\sin x))(x \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow y' = \frac{(-1 + 0 \times \frac{3\pi}{2})(-1 + 0) - (0 + (-(-1)))(\frac{3\pi}{2} \times -1)}{(-1 + 0)^2} = \frac{2 + 3\pi}{2}$$

$$34) \quad y = \tan^2 \frac{x}{3} \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$y' = 1 \times 2 \times \frac{1}{3} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{3}\right) \tan^2 \frac{x}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \rightarrow y' = 1 \times 2 \times \frac{1}{3} \left(1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$۳۵) \quad y = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos 2x} \quad x = \frac{\pi}{6}$$

$$y' = \frac{(1 \times 2 \times 1 \times \cos x \sin x)(1 + \cos 2x) - (1 + (-\sin 2x)(2))(\sin^2 x)}{(1 + \cos 2x)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$۳۶) \quad y = \sin^2 2x + \tan \frac{3x}{2} \quad x = \frac{\pi}{6}$$

$$y' = (1 \times 2 \times 2 \times \cos 2x \cdot \sin^2 2x) + \left(1 + \tan^2 \frac{3x}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{6} \rightarrow y' = \left(1 \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) + (1 + (1)^2) \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} + 3 = \frac{21}{4}$$

$$۳۷) \quad y = \sin^2 x \cos 2x$$

$$y' = (1 \times 2 \times 1x \cos x \cdot \sin x) \times \cos 2x + ((-\sin 2x) \times 2) \times \sin^2 x$$

تست: مشتق $y = \sin^2 \sqrt{2x}$ به ازای $x = \frac{\pi^2}{18}$ کدام است؟

$$\frac{27}{4\pi} \quad (۴)$$

$$\frac{27}{8\pi} \quad (۳)$$

$$\frac{9}{4\pi} \quad (۲)$$

$$\frac{9}{8\pi} \quad (۱)$$

$$y' = 1 \times 2 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{2x}} \times 2\right) \cos \sqrt{2x} \times \sin^2 \sqrt{2x}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi^2}{18}} y' = 1 \times 2 \times \frac{1}{\sqrt{2 \times \frac{\pi^2}{18}}} \times \cos \sqrt{2 \times \frac{\pi^2}{18}} \times \sin^2 \sqrt{2 \times \frac{\pi^2}{18}}$$

$$y' = 2 \times \frac{1}{\frac{\pi}{3}} \times \cos \frac{\pi}{3} \times \sin^2 \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{3}{\pi} \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{9}{\pi} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{8\pi}$$

تست: مقدار مشتق تابع $y = \tan^2 x - \cot 2x$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{6}$ (سراسری تجربی ۸۶)

$$۴ \quad (۴)$$

$$\frac{8}{3} \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۱)$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$y = \tan^x x - \cot^x x \quad x = \frac{\pi}{6}$$

$$y' = 1 \times x \times 1 \times (1 + \tan^x x)(\tan^x x) - (-(1 + \cot^x x)) (2)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} y' = 3 \left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\right) (2)$$

$$= 3 \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{4}{3}\right) (2) = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

تست: مقدار مشتق $\sin^x \sqrt{x}$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi^2}{9}$ چقدر است؟

(۱) $\frac{9}{16\pi}$ (۲) $\frac{9}{8\pi}$ (۳) $\frac{27}{16\pi}$ (۴) $\frac{27}{8\pi}$

$$y' = 1 \times x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1 \times \cos \sqrt{x} \times \sin^x \sqrt{x}$$

$$x = \frac{\pi^2}{9} \rightarrow y' = 1 \times x \times \frac{1}{2\left(\frac{\pi}{3}\right)} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3 \times \frac{3}{2\pi} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{16\pi}$$

تست: اگر $y = \sqrt{2} \sin \pi x^2$ در آن گاه $f' \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۵)

(۱) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\pi\sqrt{2}$ (۴) $\pi\sqrt{3}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2} \sin \pi x^2} \times (2 \sin \pi x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{2} \sin \pi x^2} \times (2(\cos \pi x^2) \times 2\pi x)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1}} \times \left(2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\pi}{\sqrt{6}}\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{6}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{گویا}} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

تست: مشتق تابع $y = \frac{2 \sin^2 x}{\sin x + 2}$ در $x = \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{2}{4}$ (۴) $\frac{2}{4}$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$y' = \frac{(2(\cos 2x)(2))(\sin x + 2) - (\cos x + 0)(2 \sin 2x)}{(\sin x + 2)^2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow y' = \frac{2(-1)(2)(1+2) - (0+0)(2(0))}{(1+2)^2} = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}$$

تست: اندازه‌ی مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sqrt{3 + 2 \cos \frac{\pi}{x}}$ به ازای $x = 3$ کدام است؟ (سراسری ۸۵ خ

(تجربی)

$$\frac{1}{12} (1) \quad \frac{1}{9} (2) \quad \frac{1}{6} (3) \quad \frac{1}{4} (4)$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \times \frac{1}{\sqrt{3 + 2 \cos \frac{\pi}{x}}} \times \left(0 + 2 \times \left(-\sin \frac{\pi}{x} \right) \times \left(-\frac{\pi \times 1}{x^2} \right) \right)$$

$$x = 3 \rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{1}{2\sqrt{4}} \right) \left(0 + 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(-\frac{\pi}{9} \right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{1}{4} \right) (-\sqrt{3}) \left(-\frac{\pi}{9} \right) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

تمرین: مقدار مشتق $\frac{1-\cos^2 x}{2-\sin^2 x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

$$\frac{4}{9} (1) \quad \frac{5}{9} (2) \quad \frac{7}{9} (3) \quad \frac{8}{9} (4)$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

۴-۱ چند نکته در مورد مشتق گیری

نکته ۱: برای محاسبه مشتق تابع در نقطه‌ای که آن نقطه تابع را قبل از مشتق گیری صفر می‌کند فقط از عبارتی که باعث صفر شدن تابع شده مشتق می‌گیریم و در بقیه‌ی عبارات (بدون گرفتن مشتق) ضرب می‌کنیم.

مثال: مشتق تابع $y = (x - 2) \frac{\sqrt{2x}}{x^2 + 1}$ در نقطه‌ی $x = 2$ کدام است؟

$x = 2$ تابع را صفر می‌کند (قبل از مشتق گیری)

$$y = \underbrace{(x - 2)}_{\text{عامل صفر کننده}} \frac{\overbrace{\sqrt{2x}}^{\text{بقیه عبارت}}}{x^2 + 1} \xrightarrow{x=2} y = (2 - 2) \frac{\sqrt{2(2)}}{2^2 + 1} = 0 \times \frac{2}{5} = 0$$

$$\rightarrow y' = \underbrace{(x - 2)'}_{\text{از عامل صفر کننده}} \frac{\overbrace{\sqrt{2x}}^{\text{مشتق گیری می‌نویسیم}}}{x^2 + 1} \rightarrow y' = 1 \left(\frac{\sqrt{2x}}{x^2 + 1} \right) = 1 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

مشتق می‌گیریم

تست: با فرض $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \sin \frac{\pi}{x}$ حاصل $f'(1)$ کدام است؟

$\sqrt{2}\pi$ (۱) $-\sqrt{2}\pi$ (۲) $2\sqrt{2}\pi$ (۳) $-2\sqrt{2}\pi$ (۴)

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \sin \frac{\pi}{x} \xrightarrow{x=1} f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} \times \left(\sin \frac{\pi}{x} \right)'$$

عامل
صفر کننده

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} \times \left(\cos \frac{\pi}{x} \right) \times \left(-\frac{\pi}{x^2} \right) \xrightarrow{x=1} f'(x) = \sqrt{2} \times (-1) \times (-\pi) = \sqrt{2}\pi$$

تست: مشتق تابع $y = \sin x \cos^4 x$ در $x = \pi$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۸ (۳) -۱ (۴) ۱

$$y = \underbrace{\sin x}_{\text{عامل}} \cos^4 x \xrightarrow{x=\pi} y' = \sin x \underbrace{\cos^4 x}_{\text{بقیه عبارت}} \rightarrow y' = (\cos x)(\cos^4 x) = \cos^5 x$$

صفر کننده

$$x = \pi \rightarrow y' = (-1)^5 = -1$$

مثال : مشتق تابع $f(x) = \sin x \cos x \sin 3x \cos 3x$ به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (۲) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ (۳) $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ (۴) $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$$f(x) = \underbrace{\sin x \cos x \sin 3x}_{\text{بقیه عبارت}} \underbrace{\cos 3x}_{\text{عامل}} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} f'(x) = \sin x \cos x \sin 3x (\cos 3x)'$$

صفر کننده

$$\Rightarrow f'(x) = \sin x \cos x \sin 3x ((-\sin 3x) \times 3) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1(-1 \times 3) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

مثال : اگر $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ مقدار $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{1}$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$f(x) = \underbrace{\left(\frac{\sin^6 x}{1 + 3 \sin^2 x}\right)}_{\text{بقیه عبارت}} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}_{\text{عامل صفر کننده}}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin^6 x}{1 + 3 \sin^2 x}\right)' \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)'$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin^6 x}{1 + 3 \sin^2 x}\right)' \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)(-1)\right) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6}{1 + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \times (1)(-1) = \frac{\frac{4}{16}}{1 + 3 \times \frac{1}{2}} \times -1 = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} \times -1 = -\frac{2}{20} = -\frac{1}{10}$$

تست: اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt{x^2 - 7x}$ باشد حاصل $f'(-1)$ کدام است؟

(۱) -۶ (۲) -۳ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

$$f(x) = \underbrace{(x^2 - x - 2)}_{\text{عامل صفر کننده}} \cdot \underbrace{(\sqrt{x^2 - 7x})}_{\text{بقیه عبارت}}$$

$$f'(x) = (x^2 - x - 2)'(\sqrt{x^2 - 7x}) \rightarrow f'(x) = (2x - 1)(\sqrt{x^2 - 7x})$$

$$x = -1 \rightarrow f'(x) = (-3)(\sqrt{8}) = (-3)(2\sqrt{2}) = -6\sqrt{2}$$

تست: با فرض $f(x) = \frac{\sin x(1 + \cos^2 x)}{1 + \tan^2 x}$ حاصل $f'(0)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۲

$$f(x) = \frac{\underbrace{(\sin x)}_{\text{عامل}} \cdot \underbrace{(1 + \cos^2 x)}_{\text{بقیه عبارت}}}{\underbrace{1 + \tan^2 x}_{\text{بقیه عبارت}}} \rightarrow f'(x) = \frac{(\sin x)'(1 + \cos^2 x)}{1 + \tan^2 x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(\cos x)(1 + \cos^2 x)}{1 + \tan^2 x} \xrightarrow{x=0} f'(x) = \frac{(1)(1 + 1^2)}{1 + 0^2} = 2$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

تست: مشتق تابع $f(x) = \frac{(x-1)\sqrt[3]{3x-2}}{(5x-3)^4}$ در نقطه‌ی $x = 1$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

$$\frac{5}{16} \text{ (۴)} \quad \frac{3}{4} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{8} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{16} \text{ (۱)}$$

$$f(x) = \frac{\overbrace{(x-1)}^{\text{عامل}} \cdot \overbrace{\sqrt[3]{3x-2}}^{\text{بقیه عبارت}}}{\underbrace{(5x-3)^4}_{\text{بقیه عبارت}}} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x-1)' \sqrt[3]{3x-2}}{(5x-3)^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{(1) (\sqrt[3]{3x-2})}{(5x-3)^4} \xrightarrow{x=1} f'(x)$$

$$= \frac{\sqrt[3]{1}}{2^4} = \frac{1}{16}$$

تست: اگر $f(x) = \frac{\sin x (1 + \tan^2 x)}{1 + \cos^2 x}$ آن گاه $f'(\pi)$ کدام است؟

$$-1 \text{ (۴)} \quad -\frac{1}{2} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad 1 \text{ (۱)}$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

نکته ۲: اگر تابع قابل ساده کردن یا گویا کردن است قبل از مشتق گیری آن را ساده و یا گویا کنید.

$$y = \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \quad x = \frac{1}{4}$$

$$\text{گویا کردن: } \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \times \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = \frac{x + x\sqrt{x} - \sqrt{x} - x}{1 - x} = \frac{\sqrt{x}(x - 1)}{1 - x} = -\sqrt{x}$$

$$y = -\sqrt{x} \rightarrow y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=\frac{1}{4}} y' = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = -1$$

مثال: مشتق تابع $y = \frac{1 - \tan \frac{x}{4}}{1 + \tan \frac{x}{4}}$ را در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ به دست آورید.

$$\frac{1 - \tan u}{1 + \tan u} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - u\right)$$

$$y = \frac{1 - \tan \frac{x}{4}}{1 + \tan \frac{x}{4}} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}\right) \rightarrow y' = \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}\right)\right) \times \left(-\frac{1}{4}\right) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} y'$$

$$= (1 + \tan^2 \cdot) \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

مثال: مشتق تابع $y = \sqrt{\frac{\sin x}{1 + \cos x}}$ را در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ به دست آورید؟

$$\frac{\sin u}{1 + \cos u} = \tan \frac{u}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{\sin x}{1 + \cos x}} = \sqrt{\tan \frac{x}{2}} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{\tan \frac{x}{2}}} \times \left(\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) \times \frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{1}} \times (1 + 1^2) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

مثال : مشتق تابع $y = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$ را در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ به دست آورید؟

تذکر : وقتی یک صورت و مخرج یک کسر فقط بر حسب \sin و \cos است با تقسیم همه‌ی عبارت‌ها بر \sin یا \cos آن را به \tan یا \cot تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{1 + \tan u}{1 - \tan u} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + u\right)$$

$$\xrightarrow{+\cos x} y = \frac{\frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}} \rightarrow y' = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \rightarrow y'$$

$$= \left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right) \times 1 \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} y' = (1 + (-1))' \Rightarrow y' = 2$$

تست : مشتق تابع $y = \cos^2 x (\tan^2 x - 1)$ کدام است؟ $(x \neq k\pi + \frac{\pi}{4})$

- (۱) $2 \cos 2x$ (۲) $2 \sin 2x$ (۳) $-2 \sin 2x$ (۴) $-2 \cos 2x$

$$\boxed{\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x}$$

$$y = \cos^2 x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1\right) = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x \Rightarrow y' = -(-\sin 2x) \times 2 = 2 \sin 2x$$

تست : مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$ در $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) صفر (۴) $-\sqrt{2}$

ابتدا ساده می‌کنیم

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$f(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x \Rightarrow f'(x)$$

$$= -\sin x - \cos x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

تست: اندازه‌ی مشتق تابع $y = \frac{1 - \tan 2x}{1 + \tan 2x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{8}$ کدام است؟ (سراسری ۸۹ تجربی)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

$$\frac{1 - \tan u}{1 + \tan u} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - u\right)$$

$$y = \frac{1 - \tan 2x}{1 + \tan 2x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \rightarrow y' = \dots$$

تست: مقدار مشتق $y = \sqrt{1 + \tan^2 \frac{1}{x}}$ به ازای $x = \frac{\pi}{9}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱ خ)

- (۱) $-\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9}$ (۲) $-\frac{2\pi^2}{9}$ (۳) $\frac{2\pi^2}{9}$ (۴) $\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9}$

$$1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$$

$$y = \sqrt{1 + \tan^2 \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}}} = \frac{1}{\left|\cos \frac{1}{x}\right|} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{9} \text{ ناحیه اول}} y = \frac{1}{\cos \frac{1}{x}} \rightarrow$$

$$y' = -\frac{1 \times \left(-\sin \frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(\cos \frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi^2}{9}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9}$$

تست: مشتق تابع $y = \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) \\ \Rightarrow y &= \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} = \cos x + \sin x \\ \rightarrow y' &= -\sin x + \cos x \xrightarrow{x=\frac{3\pi}{2}} y' = -(-1) + 0 = 1 \end{aligned}$$

مثال : مشتق تابع $\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ در نقطه‌ی $x = \frac{5\pi}{6}$ کدام است؟

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (1 - \cos x)(1 + \cos x) \\ y &= \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 1 + \cos x \rightarrow y' = -\sin x \xrightarrow{x=\frac{5\pi}{6}} y' = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

نکته ۳: در محاسبه توابع مثلثاتی اگر بعد از مشتق گیری و قرار دادن زاویه داده شده به جای x به یکی از زاویه‌های

$$\frac{5\pi}{8} = \frac{3\pi}{8} = 67/5^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{8} = 22/5^\circ \text{ یا } \frac{11\pi}{12} = 150^\circ \text{ یا } \frac{7\pi}{12} = 105^\circ \text{ یا } \frac{5\pi}{12} = 75^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{12} = 15^\circ \text{ مانند } \left(\frac{k\pi}{24} \text{ یا } \frac{k\pi}{8} \text{ یا } \frac{k\pi}{12}\right)$$

$$\frac{5\pi}{8} = \frac{3\pi}{8} = 67/5^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{8} = 22/5^\circ \text{ یا } \frac{11\pi}{12} = 150^\circ \text{ یا } \frac{7\pi}{12} = 105^\circ \text{ یا } \frac{5\pi}{12} = 75^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{12} = 15^\circ \text{ مانند } \left(\frac{k\pi}{24} \text{ یا } \frac{k\pi}{8} \text{ یا } \frac{k\pi}{12}\right)$$

$$\frac{5\pi}{8} = \frac{3\pi}{8} = 67/5^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{8} = 22/5^\circ \text{ یا } \frac{11\pi}{12} = 150^\circ \text{ یا } \frac{7\pi}{12} = 105^\circ \text{ یا } \frac{5\pi}{12} = 75^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{12} = 15^\circ \text{ مانند } \left(\frac{k\pi}{24} \text{ یا } \frac{k\pi}{8} \text{ یا } \frac{k\pi}{12}\right)$$

(زوایایی که با دو برابر کردن به یک زاویه آشنا تبدیل می‌شوند)

$$\text{بر کاربرد} \begin{cases} \sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u \\ \cos^2 u - \sin^2 u = \cos 2u \\ \cot u + \tan u = \frac{2}{\sin 2u} \\ \cot u - \tan u = 2 \cot 2u \end{cases}$$

مثال : مشتق تابع $y = \cos^2 \frac{\pi}{4x}$ را در نقطه‌ی $x = 2$ به دست آورید؟

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$y' = 1 \times 2 \times \left(-\frac{\pi \times 4}{(4x)^2}\right) \left(-\sin \frac{\pi}{4x}\right) \left(\cos \frac{\pi}{4x}\right)$$

$$\xrightarrow{x=2} y' = 2 \times \left(-\frac{\pi \times 4}{64}\right) \left(-\sin \frac{\pi}{8}\right) \left(\cos \frac{\pi}{8}\right)$$

$$y' = -\frac{\pi}{8} \times -\frac{1}{2} \sin 2 \left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{16} \times \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{32}$$

۱) $y = \sqrt{\tan x + \cot x}$

$$\cot u + \tan u = \frac{2}{\sin 2u}$$

$x = \frac{\pi}{12}$

$$y = \sqrt{\frac{2}{\sin 2x}} \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\sin 2x}}} \times \left(\frac{-2 \times ((\cos 2x) \times 2)}{(\sin 2x)^2}\right) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{12}} y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\frac{1}{2}}}} \times \left(-\frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) = -2\sqrt{3}$$

۲) $y = \sin^4(x')$

$x = \sqrt{\frac{\pi}{12}}$

$$y' = 1 \times 2 \times (2x)(\cos x')(\sin x') = 4 \sqrt{\frac{\pi}{12}} \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} = 4 \times \sqrt{\frac{\pi}{12}} \times \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{\pi}{12}}$$

۳) $y = \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x$

$x = \frac{\pi}{12}$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$y = \sin 2x \cos 2x \cos 4x \rightarrow y = \frac{1}{2} \sin 4x \cos 4x$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 8x \rightarrow y' = \frac{1}{2} \times (\cos 8x) \times 8 = (\cos 8x) \times 2$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{12}} y' = \cos 8 \left(\frac{\pi}{12}\right) \times 2 = \cos \left(\frac{2\pi}{3}\right) \times 2 = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$$

۴) $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$

$x = \frac{\pi}{6}$

$$\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$$

$$y' = 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \left(-\sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)\right) \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)\right)$$

$$y' = 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times \left(-\sin \frac{3\pi}{4}\right) \left(\cos \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$y' = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{4}\right) \left(\cos \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} \times \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$\delta) y = \sin^2(x+1) \quad x = \frac{\pi}{8} - 1$$

$$\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$$

$$y' = 1 \times 2 \times 1 \times \cos(x+1) (\sin(x+1))$$

$$y' = 1 \times 2 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{8} = 2 \times \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تست: مشتق تابع $f(x) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{x}\right)$ در $x = 8$ کدام است؟

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{128} \quad (4)$$

$$\frac{-\pi\sqrt{2}}{128} \quad (3)$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{64} \quad (2)$$

$$\frac{-\pi\sqrt{2}}{64} \quad (1)$$

$$f'(x) = 1 \times 2 \times \left(\frac{\pi}{x^2}\right) \left(-\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{x}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{x}\right)$$

$$\xrightarrow{x=8} f'(8) = 2 \times \left(\frac{\pi}{64}\right) \left(-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$2 \times \left(\frac{\pi}{64}\right) \times \left(-\frac{1}{2} \sin\left(2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\right) = -\frac{\pi}{64} \times \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= -\frac{\pi}{64} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{128}$$

تست: مشتق تابع $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right)$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{8} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{8} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (1)$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$y' = 1 \times 2 \times \left(\frac{1}{4}\right) \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right)\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right)\right) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{3}}$$

$$y' = -\frac{1}{4} \times \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right)\right) \Rightarrow y' = -\frac{1}{4} \times \sin 5\frac{\pi}{12} \cdot \cos 5\frac{\pi}{12}$$

$$\xrightarrow{\sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u} y' = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \sin\left(2 \times 5\frac{\pi}{12}\right) \rightarrow y' = -\frac{1}{4} \times \sin 5\frac{\pi}{6} \rightarrow y' = -\frac{1}{4} \times \left(+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

تست: مقدار مشتق تابع $y = \cos^2 \frac{\pi}{3x}$ به ازای $x = 4$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰ خ)

$$\frac{\pi}{32} \text{ (۴)} \quad \frac{\pi}{48} \text{ (۳)} \quad \frac{\pi}{72} \text{ (۲)} \quad \frac{\pi}{96} \text{ (۱)}$$

$$y' = 1 \times 2 \times \frac{-\pi \times 2}{(3x)^2} \left(-\sin \frac{\pi}{3x}\right) \left(\cos \frac{\pi}{3x}\right) \rightarrow y' = -2 \times \frac{-2\pi}{9x^2} \sin \frac{\pi}{3x} \cdot \cos \frac{\pi}{3x} \rightarrow$$

$$y' = 2 \times \frac{\pi}{3x^2} \sin \frac{\pi}{3x} \cdot \cos \frac{\pi}{3x} \xrightarrow{x=4} y' = 2 \times \frac{\pi}{48} \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \xrightarrow{\sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u}$$

$$y' = \frac{\pi}{24} \cdot \left(\frac{1}{2} \sin\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right)\right) \rightarrow y' = \frac{\pi}{24} \times \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y' = \frac{\pi}{24} \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{96}$$

تمرین: مشتق تابع $y = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

$$-\frac{1}{8} \text{ (۴)} \quad -\frac{1}{4} \text{ (۳)} \quad -\frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (۱)}$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

نکته ۴: همانند حد اگر کمان صفر شد ابتدا \sin و \tan را حذف می کنیم و به جای $\cos u$ عبارت $1 - \frac{u^2}{4}$ را قرار می دهیم سپس مشتق می گیریم.

مثال: مشتق تابع $y = \sin(\cos x)$ را در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ به دست آورید چون کمان سینوس یعنی $\cos x$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ صفر می شود پس \sin حذف می شود.

$$y = \cos x \rightarrow y' = (-\sin x) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} y' = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

مثال: مشتق تابع $y = \tan(\sin 2x)$ را در نقطه $x = 0$ به دست آورید؟

کمان \tan و \sin صفر می شود پس حذف می شوند

$$y = \tan(\sin 2x) \xrightarrow{\text{کمان } \tan \text{ و } \sin \text{ صفر می شود پس حذف می شوند}} y = 2x \rightarrow y' = 2$$

تست: مشتق تابع $y = \sin(\sin x)$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

۰ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴)

$$y = \sin(\sin x) \xrightarrow{x=0} y = x \rightarrow y' = 1$$

تست: مقدار مشتق تابع $y = \tan(\cos x)$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۰ (۴) π (۳) ۱ (۲) -۱ (۱)

$$y = \tan(\cos x) \rightarrow y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

مشتق مراتب بالاتر

تست: اگر مقدار مشتق مرتبه دوم تابع $y = a \cos 2x$ در $x = \frac{\pi}{4}$ برابر ۲ باشد a کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۲

$$y' = a(-\sin 2x \cdot 2) = -2a \sin 2x \rightarrow y = -2a(\cos 2x \times 2) = -4a \cos 2x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}}$$

$$y = -4a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) = -4a \cos \pi = -4a(-1) = 4a \xrightarrow{y''=2} 4a = 2 \rightarrow a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

تست: اگر $y = \cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{2}x$ حاصل $\frac{y''}{y}$ برابر کدام است؟ (سراسری تجربی)

- (۱) -۲ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۲

$$y' = -\sin \sqrt{2}x \cdot \sqrt{2} + \cos \sqrt{2}x \times \sqrt{2} \Rightarrow y'' = -\cos \sqrt{2}x \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} + (-\sin \sqrt{2}x \cdot \sqrt{2} \times \sqrt{2})$$

$$= -2 \cos \sqrt{2}x - 2 \sin \sqrt{2}x = -2(\cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{2}x) \Rightarrow \frac{y''}{y}$$

$$= \frac{-2(\cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{2}x)}{\cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{2}x} = -2$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

۱-۵ مشتق تابع Ln :

$$y = \ln u \rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

تست: در تابع $y = \ln(1 + \sin x)$ مشتق تابع در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟ (سراسری تجربی)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\sqrt{3}$

$$y' = \frac{(1 + \sin x)'}{1 + \sin x} = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} y' = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{1 + \sin \frac{\pi}{6}} \Rightarrow y' = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

تست: مشتق تابع $y = \ln(\sin \pi x^2)$ در نقطه‌ی $x = \frac{1}{4}$ کدام است؟ (سراسری تجربی)

$$y' = \frac{(\sin \pi x^2)'}{\sin \pi x^2} \rightarrow y' = \frac{(\cos \pi x^2)(2\pi x)}{\sin \pi x^2} \xrightarrow{x=\frac{1}{4}} y' = \frac{\cos\left(\pi\left(\frac{1}{4}\right)\right)\left(2\pi \times \frac{1}{4}\right)}{\sin \pi\left(\frac{1}{4}\right)} =$$

$$\frac{\cos \frac{\pi}{4} \cdot \pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \pi$$

مثال: مشتق تابع $y = \ln(\sin x) + \ln(\cos x)$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

$$y' = \frac{(\sin x)'}{\sin x} + \frac{(\cos x)'}{\cos x} \rightarrow y' = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{-\sin x}{\cos x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} y' = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} + \frac{-\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= 1 + (-1) = 0$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

مثال : مشتق تابع $y = \ln|\ln x|$ در نقطه‌ی $x = e^2$ کدام است؟

$$y' = \frac{(\ln x)'}{\ln x} \rightarrow y' = \frac{\frac{(x)'}{x}}{\ln x} \rightarrow y' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \Rightarrow y' = \frac{1}{x \ln x} \xrightarrow{x=e^2} y' = \frac{1}{e^2 \ln e^2} \xrightarrow{\ln u^m = m \ln u} y' = \frac{1}{e^2 \ln e^2} \xrightarrow{\ln e^2 = 2 \ln e} y' = \frac{1}{2e^2}$$

مثال : مشتق تابع $y = \frac{\ln x}{x}$ در نقطه‌ی $x = 1$ کدام است؟

$$y' = \frac{(\ln x)' \cdot x - (x)' \ln x}{x^2} \rightarrow y' = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{1 - \ln x}{x^2} \xrightarrow{x=1} y' = \frac{1 - \ln 1}{(1)^2} \xrightarrow{\ln 1 = 0} y' = \frac{1}{1} = 1$$

مثال : مشتق تابع $y = \ln(2 - \cos^2 x)$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

$$y' = \frac{(2 - \cos^2 x)'}{2 - \cos^2 x} \rightarrow y' = \frac{-1 \times 2 \times 1 \times (-\sin x)(\cos x)}{2 - \cos^2 x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} y' = \frac{2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4}}{2 - \left(\cos \frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

تست : اگر مشتق تابع $y = \ln|\sin ax|$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4a}$ باشد آنگاه a کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$y' = \frac{(\sin ax)'}{\sin ax} \rightarrow y' = \frac{(\cos ax) \times a}{\sin ax} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4a}} y' = \frac{\cos a \left(\frac{\pi}{4a}\right) \times a}{\sin a \left(\frac{\pi}{4a}\right)} \rightarrow y' = \frac{\cos \frac{\pi}{4a} \times a}{\sin \frac{\pi}{4a}} \rightarrow y'$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = a \xrightarrow{y'=a} \boxed{a=2}$$

نکته: در مشتق گیری از $\ln u$ اگر مشتق گیری از u وقت گیر باشد بهتر است ابتدا تابع را با توجه به قوانین زیر تا جایی که امکان دارد ساده کنیم سپس مشتق بگیریم.

۱) $\ln u^m = m \ln u$	۵) $e^{\ln u} = u$
۲) $\ln \sqrt[n]{u^m} = \frac{m}{n} \ln u$	۶) $\boxed{\ln e = 1}$
۳) $\ln u \cdot v = \ln u + \ln v$	۷) $\ln 1 = 0$
۴) $\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$	

مثال : مشتق تابع $y = \ln \frac{x^3}{x+1}$ در نقطه‌ی $x = 1$ کدام است؟

طبق ویژگی ۴:

$$y = \ln x^3 - \ln(x+1) \rightarrow y = 3 \ln x - \ln(x+1) \rightarrow y' = 3 \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \xrightarrow{x=1} y'$$

$$= 3 \times \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

مثال : مشتق تابع $y = \ln \sin^2 2x$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

طبق ویژگی ۱:

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$y = 3 \ln \sin 2x \rightarrow y' = 3 \times \frac{(\cos 2x) \times 2}{\sin 2x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} y' = 3 \times \frac{\cos\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) \times 2}{\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{3 \times \cos \frac{\pi}{3} \times 2}{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{3 \times \frac{1}{2} \times 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{گویا}} \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

مثال : مشتق تابع $y = \ln \sqrt{\frac{\sin x}{1+\cos x}}$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

طبق ویژگی ۲:

$$y = \ln \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{ویژگی ۱}} y = \frac{1}{2} \ln \frac{\sin x}{1+\cos x} \xrightarrow{\text{ویژگی ۴}} y = \frac{1}{2} (\ln(\sin x) - \ln(1+\cos x)) \rightarrow y'$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{-\sin x}{1+\cos x} \right) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} y' = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} - \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{1+\cos \frac{\pi}{4}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+0} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (1+1) = \frac{1}{2} (2) = 1$$

مثال : مشتق تابع $y = \ln \frac{\sin^4 x \cdot \cos^5 x}{\tan^7 x}$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

جواب: $-\frac{11\sqrt{3}}{3}$

$$y = \ln \sin^4 x + \ln \cos^5 x - \ln \tan^7 x \Rightarrow y = 4 \ln \sin x + 5 \ln \cos x - 7 \ln \tan x \rightarrow y'$$

$$= 4 \times \frac{\cos 4x \times 4}{\sin 4x} + 5 \times \frac{-\sin x}{\cos x} - 7 \times \frac{(1+\tan^2 x)}{\tan x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{3}}$$

مثال : مشتق تابع $y = e^{\ln \cos x}$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

جواب: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{3}} y' = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

تست: اندازه ی مشتق تابع $y = \ln e^{\sqrt{\sin x}}$ در نقطه ی $x = \frac{\pi}{6}$ واقع بر آن کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۲ خارج)

$$\frac{\sqrt{6}}{4} \text{ (۴)}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ (۳)}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{8} \text{ (۲)}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8} \text{ (۱)}$$

$$y = \ln e^{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{\sin x} \ln e = \sqrt{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \times \cos x$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin \frac{\pi}{6}}} \times \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$y = a^u \rightarrow y' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$$

۱-۶ مشتق توابع نمایی :

مثال:

$$۱) y = ۲^{\sin x} \rightarrow y' = \cos x \cdot ۲^{\sin x} \cdot \ln ۲$$

$$۲) y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\cos ۳x} \rightarrow y' = -۳ \cos ۳x \cdot \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\cos ۳x} \cdot \ln \frac{۱}{۲}$$

$$۳) y = (۲/\sqrt{v})^{x^2+1} \rightarrow y' = ۲x \cdot (۲/\sqrt{v})^{x^2+1} \cdot \ln ۲/\sqrt{v}$$

$$۴) y = e^{x^2+۳x} \rightarrow y' = (۲x + ۳) \cdot e^{x^2+۳x} \cdot \ln e = (۲x + ۳) \cdot e^{x^2+۳x}$$

$$\Rightarrow y = e^u \rightarrow y' = u' e^u$$

مثال : مشتق تابع $y = e^{1+\sin ۲x}$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{۲}$ کدام است؟

$$\begin{aligned} y' &= (1 + \sin ۲x)' \cdot e^{1+\sin ۲x} \rightarrow y' = (\cos ۲x \times ۲)' \cdot e^{1+\sin ۲x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{۲}} y' \\ &= \left(\cos\left(۲ \times \frac{\pi}{۲}\right)\right) \times ۲ \times e^{1+\sin ۲\left(\frac{\pi}{۲}\right)} \rightarrow y' = (\cos \pi) \times ۲ \times e^{1+\sin \pi} \\ &= (-۱) \times ۲ \times e^{1+0} = -۲e^1 = -۲e \end{aligned}$$

مثال : مشتق تابع $y = e^{\sin ax} + e^{\cos ax}$ در نقطه‌ی $x = ۰$ کدام است؟

$$\begin{aligned} y' &= (\sin ax)' e^{\sin ax} + (\cos ax)' e^{\cos ax} \rightarrow y' \\ &= (\cos ax \times a) e^{\sin ax} + (-\sin ax \times a) e^{\cos ax} \xrightarrow{x=0} y' \\ &= (\cos a(\cdot) \times a) e^{\sin a(\cdot)} + (-\sin a(\cdot) \times a) e^{\cos a(\cdot)} \\ &= ۱ \times a \times e^0 + (-0 \times a) \times e^0 = a \end{aligned}$$

تست : مشتق تابع $f(x) = x^{۲^x} - ۲^x$ در نقطه‌ی $x = ۱$ کدام است؟

۲ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) صفر

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$f(x) = x2^x - 2^x = 2^x(x - 1) \xrightarrow{\text{مشتق عامل صفر کننده}} y' = 2^x(x - 1)' \Rightarrow y' = 2^x(1) = 2^x \xrightarrow{x=1} y' = 2^1 = 2$$

تست: هرگاه $f(x) = 2^{\sin x + \cos x}$ باشد $f'(\frac{3\pi}{4})$ چند برابر $\ln 2$ است؟

$$\sqrt{2}(4) \quad 2\sqrt{2}(3) \quad -2\sqrt{2}(2) \quad -\sqrt{2}(1)$$

$$f'(x) = (\cos x - \sin x) 2^{\sin x + \cos x} \ln 2$$

$$f'(\frac{3\pi}{4}) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) 2^{\frac{\sqrt{2}}{2} + (-\frac{\sqrt{2}}{2})} \ln 2 = -\sqrt{2} \times 2 \times \ln 2 = -\sqrt{2} \ln 2$$

تست: مشتق تابع $y = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1}{e^x + 1}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

جواب: ۱

$$y' = \frac{(e^{2x} + 2e^x + 1)'(e^x + 1) - (e^x + 1)'(e^{2x} + 2e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} \rightarrow y' = \frac{(2e^{2x} + 2e^x)(e^x + 1) - (e^x)(e^{2x} + 2e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} \xrightarrow{x=0} y' = 1$$

مثال: مشتق تابع $f(x) = 2xe^{-x}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

$$f'(x) = 2e^{-x} + (-1)e^{-x} \times 2x \xrightarrow{x=0} f'(x) = 2e^{-0} + (-1)e^{-0} \times 2(0) \rightarrow f'(x) = 2 \times 1 - 1 \times 1 \times 0 = 2 - 0 = 2$$

مثال: مشتق تابع $y = \cos x e^{\sin x}$ در نقطه $x = \pi$ کدام است؟

$$y' = (\cos x)' e^{\sin x} + (e^{\sin x})' \cdot \cos x \rightarrow y' = (-\sin x) e^{\sin x} + \cos x e^{\sin x} \cdot \cos x \xrightarrow{x=\pi} y' = -\sin \pi e^{\sin \pi} + \cos \pi e^{\sin \pi} \cos \pi \rightarrow y' = -0 \times e^0 + (-1)e^0 \times -1 \rightarrow y' = 0 + 1 = 1$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

مثال : مشتق تابع $y = e^{2x} \cos \pi x$ در نقطه‌ی $x = 0$ کدام است؟

$$y' = (e^{2x})' \cos \pi x + (\cos \pi x)' e^{2x} \xrightarrow{x=0} y' = 2e^{2x} \cos \pi x + (-\sin \pi x \times \pi) e^{2x} \xrightarrow{x=0} y' = 2e^{2(0)} \cos \pi(0) + (-\sin \pi(0) \times \pi) e^{2(0)} = 2 \times 1 \times (+1) + (0 \times \pi) \times 1 = 2$$

مثال : مشتق تابع $y = \ln(e^x + e^{-x})$ در نقطه‌ی $x = 0$ کدام است؟

$$y = \frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}} \rightarrow y' = \frac{(e^x + (-1)e^{-x})}{e^x + e^{-x}} \xrightarrow{x=0} y' = \frac{e^0 + (-1)e^{-0}}{e^0 + e^{-0}} \rightarrow y' = \frac{1 + (-1) \times 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

تست : اگر $x > 0$ ، $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ ، آن گاه $f'(0^+) - f'(0^-)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۴)

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

$$\begin{cases} 0^+ : f(x) = \ln(x^2 + 1) \rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \xrightarrow{x=0} f'_+(0) = \frac{2(0)}{(0)^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0 \\ 0^- : f(x) = xe^x \rightarrow f'(x) = 1e^x + e^x \cdot x \xrightarrow{x=0} f'_-(0) = e^{(0)} + e^{(0)} \cdot (0) = 1 \\ \Rightarrow f'(0^+) - f'(0^-) = 0 - 1 = -1 \end{cases}$$

تست : اگر $f(x) = \frac{e^{2x} \ln x}{x+1}$ باشد حاصل $f'(1)$ چه قدر است؟

(۱) e (۲) e^2 (۳) $\frac{e^2}{2}$ (۴) ۰

$$f(x) = \frac{e^{2x} \ln x}{x+1} \rightarrow f'(x) = \frac{e^{2x} \times \frac{1}{x}}{x+1} \rightarrow f'(1) = \frac{e^{2(1)} \times \frac{1}{1}}{1+1} = \frac{e^2}{2}$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

$$\begin{cases} y = f(x) & \text{فرم صریح} \\ f(x, y) = 0 & \text{فرم ضمنی} \end{cases}$$

۲-۱ مشتق گیری ضمنی:

در مشتق گیری ضمنی بدون آن که

جهت تهیه ادامه این جزوه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و یا به آیدی تلگرام @habib_hashemi پیام

دهید.

جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تألیف حبیب هاشمی کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با هیجده سال سابقه تدریس دربرگزاری کلاس های کنکور؛ دبیر رسمی آموزش و پرورش منطقه ۴ تهران و مدرس دانشگاه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و

یا به آیدی تلگرام @habib_hashemi پیام دهید.

اینستاگرام: [riazi.academy](https://www.instagram.com/riazi.academy)

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تألیف حبیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

مشاهده جزوات درسایت ریاضیکده

www.riazikade.ir

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

موفق بودن در ریاضی ادرصد استعداد و ۹۹ درصد پشتکار

تدریس خصوصی ریاضیات

متوسطه اول و متوسطه دوم

کنکور- تقویتی

گروهی / انفرادی

به صورت تخصصی و کاملا مفهومی با جزوه اختصاصی

مشاهده جزوات در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

و سایت ریاضیکده www.riazikade.ir

دبیر رسمی آموزش و پرورش با ۱۸ سال سابقه تدریس

کارشناس ارشد ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

مؤلف شش کتاب در زمینه کنکور

نویسنده برتر استان

معلم نمونه شهرستان و استان

نفر اول استان در جشنواره الگوهای برتر تدریس

نفر اول کشور در جشنواره الگوهای برتر تدریس

شماره تماس: ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱